579 школа. 10 класс, алгебра и начала анализа.

Удалова Елена Михайловна.

Раздел программы: **«Логарифмическая функция»**

Тема урока: **«Применение свойств логарифмической функции»**

Цели урока:

Образовательные: формирование умения сравнения иррациональных чисел, записанных с помощью логарифма;
формирование умения применять теорию в различных конкретных ситуациях,
умения выбрать рациональный способ решения.

Развивающие: развитие умений выявлять закономерности, обобщать;
переходить от общих методов решения к частным;
развитие элементов творческой деятельности как качеств мышления – интуиции, глубины.

Воспитательные: воспитание аккуратности, настойчивости в достижении цели.

Тип урока: урок применения знаний и умений

Структура урока

1. Ознакомление с темой урока, постановка его целей.
2. Повторение свойств логарифмической функции; повторение и анализ основных фактов, теорем, алгоритмов; применение свойств для сравнения чисел в стандартных ситуациях.
3. Решение нестандартной задачи.
4. Осмысление содержания и последовательности применения практических действий при выполнении предстоящих заданий.
5. Постановка домашнего задания.
6. Подведение итогов урока.

Ход урока

I. Мы подошли к заключительным урокам по теме « Логарифмы чисел».
Дали определение логарифма числа;
сравнивали логарифмы чисел.
Рассмотрели функцию $y = \log_a x$ и ее график, свойства;
решали логарифмические уравнения и неравенства.
Сегодня на уроке мы снова вернемся к сравнению логарифмов чисел, повторим известные способы сравнения и рассмотрим новые.

II. Вспомним основные приемы сравнения положительных чисел a и b.

- Составить разность a-b и сравнить ее с нулем.
- Составить частное a:b и сравнить его с единицей.

Какие свойства логарифмической функции или свойства логарифмов чисел применяются при сравнении логарифмов чисел?

- Монотонность логарифмической фунции;
- Свойства: $0 < X_1 < X_2$
  $\log_a X_1 < \log_a X_2$, если $a > 1$
  $\log_a X_1 > \log_a X_2$, если $0 < a < 1$

Устно: **сравнить**

Пример 1. $\log_{15}3$ и $\log_{15}\sqrt{8}$

($\log_{15}3 > \log_{15}\sqrt{8}$)

Пример 2. $\log_{0,15} 5$ и $\log_{0,15}\sqrt{10}$

($\log_{0,15} 3 < \log_{0,15}\sqrt{10}$)

Пример 3. $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$

($\log_5 3 > 2/3$) Решение: $\frac{2}{3} = \log_5 5^{2/3} = \log_5 \sqrt[3]{25}$

$3 = \sqrt[3]{27}$

$\sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{25}$,

значит, $\log_5 \sqrt[3]{27} > \log_5 \sqrt[3]{25}$,

значит, $\log_5 3 > \frac{2}{3}$

III. Известными способами сравнить можно не все числа.
Рассмотрим следующий пример.
Основания разные, логарифмируемые числа разные.
Также, как и при сравнении иррациональных чисел,
применяется метод «оценки» или сравнение с каким-нибудь «хорошим» числом.

Пример 4. Сравнить $\log_4 0{,}3$ и $\log_7 2$

$\log_4 0{,}3 < \mathbf{0}$, а $\log_7 2 > \mathbf{0}$, значит, $\log_4 0{,}3 < \log_7 2$

Пример 5. Сравнить $\log_3 2$ и $\log_{13} 17$

$\log_3 2 < 1$

$\log_{13} 17 > 1$ Значит, $\log_3 2 < \log_{13} 17$

IV. Пример 6. Сравнить $\log_8 5$ и $\log_6 5$

Способ 1. $\log_8 5 = \frac{1}{\log_5 8}$, $\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6}$

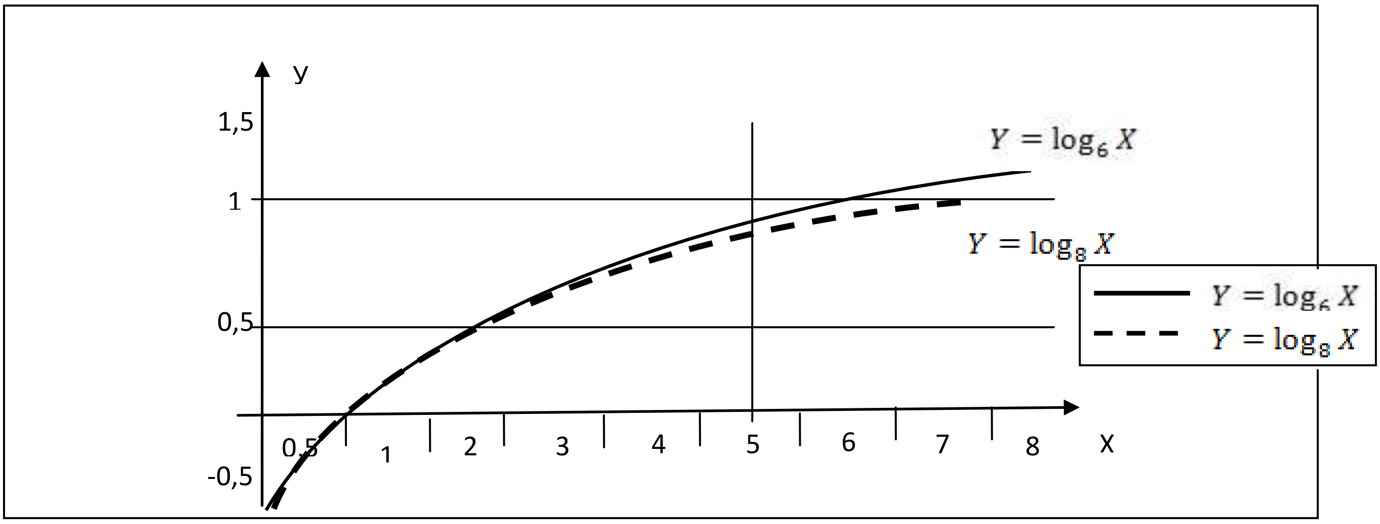
$\log_5 8 > \log_5 6$, значит

$\frac{1}{\log_5 8} < \frac{1}{\log_5 6}$, следовательно,

$\log_8 5 < \log_6 5$

Способ 2. Графический. Построим схематично графики функций

$y = \log_8 X$ и $y = \log_6 X$



По графику видно, что значение логарифма одного и того же числа b >1 тем больше, чем меньше основание логарифма.

Т.е. $\log_8 5 < \log_6 5$

И наоборот, значение логарифма одного и того же числа 0 < b < 1 тем больше, чем больше основание логарифма.

V. При сравнение логарифмов следующих чисел используются идеи, отличные от предыдущих.

<u>Пример 7.</u> Сравнить $\log_7 8$ и $\log_8 9$

Сравниваемые числа близки к 1.
Вычитая 1, получим числа, близкие к 0, более удобные для сравнения.

$$\log_7 8 - 1 = \log_7 \frac{8}{7} = \log_7(1 + \frac{1}{7})$$

$$\log_8 9 - 1 = \log_8 \frac{9}{8} = \log_8(1 + \frac{1}{8})$$

$\log_7 \frac{8}{7} = \log_7(1 + \frac{1}{7}) > \log_8(1 + \frac{1}{7}) > \log_8(1 + \frac{1}{8}) = \log_8 \frac{9}{8}$, значит,

$$\log_7 8 > \log_8 9$$

<u>Пример 8.</u> Сравнить $\log_2 3$ и $\log_3 4$

Предыдущим способом сделать дома.
Рассмотрим ещё способ.

Как можно видоизменять числа?

- умножить на какое-нибудь натуральное число.

$2\log_2 3 = \log_2 8 = 3$
$2\log_3 4 = \log_3 16 < \log_3 27 = 3$,т. е.
$2\log_3 4 < 3 < 2\log_3 27 = 3$, значит,
$\log_3 4 < \log_2 3$

Проследим закономерность.
На самом деле справедливо следующее соотношение

$\log_x(x+1) < \log_{x-1} x$

Докажем, что функция $y = \log_{x-1} x$ убывает при $x > 2$, где $x \in N$

Преобразуем неравенство, которое надо доказать

$\log_x(x+1) < \dfrac{1}{\log_x(x-1)}$, если $x > 2$, то $\log_x(x-1) > 0$, тогда

$\log_x(x+1) \cdot \log_x(x-1) > 1$

Для доказательства воспользуемся результатом сравнения среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq b, b \geq 0$

Имеем

$\dfrac{\log_x(x+1) + \log_x(x-1)}{2} \geq \sqrt{\log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1)}$, т. е

$\sqrt{\log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1)} \leq \dfrac{\log_x(x^2-1)}{2} < \dfrac{\log_x x^2}{2} = 1 | x > 2$

значит, $\sqrt{\log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1)} < 1$

$\log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1) < 1$

$\dfrac{1}{\log_{x-1} x} \cdot \log_x(x+1) < 1, x > 2$ и $\log_{x-1} x > 0$,это означает, что

$\log_x(x+1) < \log_{x-1} x$, что и требовалось доказать.

$\log_{71} 72 < \log_{70} 71$

<u>Пример 9</u> Сравнить $\log_4 6$ *и* $\log_6 8$

По аналогии докажем, что $y = \log_{x-2} x$ убывает при $x > 3$, т.е.

$\log_x(x+2) < \log_{x-2} x$

$\log_x(x+2) < \dfrac{1}{\log_x(x-2)}$ *если* $x > 3$, *то* $\log_x(x-2) > 0$

$\log_x(x+2) \cdot \log_x(x-2) < 1$

Имеем

$$\sqrt{\log_x(x+2) \cdot \log_x(x-2)} \leq \frac{\log_x(x+2) + \log_x(x-2)}{2} = \frac{\log_x(x^2-4)}{2} < \frac{\log_x x^2}{2} = 1,$$

Поэтому

$\log_x(x+2)\cdot\log_x(x-2)<1,$ значит,

$\dfrac{\log_x(x+2)}{\log_{x-2}x}<1$ u $\log_x(x+2)<\log_{x-2}x$

Итак, $\log_4 6>\log_6 8$

Вряд ли на экзамене вы будете проводить доказательство в общем виде, но идея применима и в конкретных случаях.

<u>Пример 10</u> Сравнить $\log_{10}11$ u $\log_{11}12$

$\log_{10}11>0$ u $\log_{11}12>0$

$$\log_{10}11=\frac{1}{\log_{11}10}$$

$$\frac{\log_{11}10+\log_{11}12}{2}\geq\sqrt{\log_{11}10\cdot\log_{11}12}$$

$$\sqrt{\log_{11}10\cdot\log_{11}12}\leq\frac{\log_{11}120}{2}<\frac{\log_{11}121}{2}=1$$

$$\sqrt{\log_{11}10\cdot\log_{11}12}<1$$

$$\log_{11}10\cdot\log_{11}12<1$$

$$\frac{1}{\log_{10}11}\cdot\log_{11}12<1, \textit{значит}, \log_{11}12<\log_{10}11$$

<u>Пример 11</u> Сравнить $\log_4 6$ u $\log_6 8$

$\log_4 6>0$ u $\log_6 8>0$

$$\log_4 6=\frac{1}{\log_6 4}$$

$$\sqrt{\log_6 4\cdot\log_6 8}\leq\frac{\log_6 4+\log_6 8}{2}$$

$$\sqrt{\log_6 4 \cdot \log_6 8} \le \frac{\log_6 32}{2} < \frac{\log_6 36}{2} = 1$$

$$\sqrt{\log_6 4 \cdot \log_6 8} < 1$$

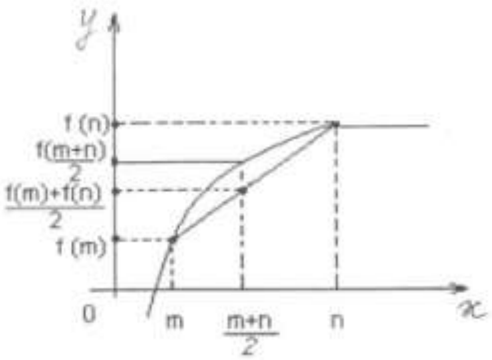
$$\log_6 4 \cdot \log_6 8 < 1$$

$$\frac{\log_6 8}{\log_4 6} < 1, \textit{значит}, \ \log_6 8 < \log_4 6$$

VI. **<u>Пример 12.</u>** Сравнить $\log_5 7$ *и* $\log_3 6$

Ни одним из предыдущих способов числа не сравнить.
Здесь можно использовать определение выпуклости функции.

Определение. Функция y=f(x) называется выпуклой на [m;n],
если $f(\frac{m+n}{2}) > \frac{f(m)+f(n)}{2}$



При a > 1 y = $\log_a x$ – выпуклая функция, значит,
$\text{Log}_t \frac{m+n}{2} > \frac{\log_t m + \log_t n}{2}$

$$\log_3 6 - \log_5 7 = \log_3 2 + 1 - \log_5 7$$

$$\log_3 2 = \log_3 \frac{3+1}{2} > \frac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1)$$

$$\log_3 2 + 1 - \log_5 7 > \frac{1}{2}(\log_3 3 + \log_3 1) + 1 - \log_5 7 = 1{,}5 - \log_5 7 = \log_5 5^{\frac{2}{3}} - \log_5 7 = \log_5 \frac{\sqrt{125}}{7} > \log_5 \frac{\sqrt{121}}{7} = \log_5 \frac{11}{7} > 0$$

Т.е. $\log_3 6 > \log_5 7$

VII. Итак, сегодня на уроке мы повторили основные способы сравнения логарифмов чисел и познакомились ещё с некоторыми нестандартными способами.

VIII. Для проверки усвоения навыка и умения сравнения логарифмов чисел, учащимся предложена самостоятельная работа.

<u>Сравнить:</u> (здесь примеры даны с ответами)

1) $\log_{23} 5 < \log_{23} 17$
2) $\log_{0.23} 4 > \log_{0.23} \sqrt{23}$
3) $\log_4 3 < \frac{2}{3}$
4) $\log_{12} 0.1 < \log_7 3$

5) $\log_3 11 > \lg \quad 38$
6) $\log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} 4$
7) $\log_5 7 \; u \; \log_7 9$